修正 Camassa-Holm 方程的 Cauchy 问题*

张双虎[1]，冯兆永[2]，杨凯波[1]
（1. 西南大学数学与统计学院，重庆 400715；
2. 中山大学数学与计算科学学院，广东 广州 510275）

摘 要：主要研究修正 Camassa-Holm 方程的 Cauchy 问题。首先提出了一个新的爆破结果，这一结果优化了早先获得的一些结果；然后证明了修正 Camassa-Holm 方程的 Cauchy 问题在解对初值不一致连续依赖意义下在空间 $H^s(\mathbf{R}), s < \frac{3}{2}$ 中不适定。

关键词：修正 CamassaHolm 方程；爆破；关于初值非一致依赖性
中图分类号：O175.2 **文献标志码**：A **文章编号**：0529－6579（2014）04－0008－05

The Cauchy Problem for the Modified Camassa-Holm Equations

ZHANG Shuanghu[1], *FENG Zhaoyong*[2], *YANG Kaibo*[1]
（1. School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China;
2. School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China）

Abstract: The Cauchy problem of the modified Camassa-Holm equation is mainly studied. First, a new blow-up phenomenon which is an improvement of the earlier ones is presented. Then it is proved that the Cauchy problem for the modified Camassa-Holm equation is not locally well-posedness in the sense that its solution does not depend uniformly continuously on the initial data.

Key words: the modified Camassa-Holm equation; blow up; non-uniform dependence on initial data

在本文，我们考虑如下直线上修正 Camassa-Holm 方程（mCH 方程）的初值问题

$$\begin{cases} m_t + ((u^2 - u_x^2)m)_x = 0, \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \quad t > 0, x \in \mathbf{R} \quad (1)$$

这里

$$m = (1 - \partial_x^2)u = u - u_{xx} \quad (2)$$

表示系统的动量密度。这个非线性方程通过对修正 Korteweg-de Vries 方程的 bi-Hamiltonian 表示应用 tri-Hamiltonian 对偶方法而导出[1-2]，因此它是具有 bi-Hamiltonian 结构的可积系统。方程（1）描述平直底面上浅水表面波的无向性传播，$u(t,x)$ 表示非维数变量的自由表面高度。

Camassa-Holm 方程（CH 方程）

$$m_t + um_x + 2mu_x = 0, m = u - u_{xx}$$

在过去的 20 多年吸引了大量研究者的研究兴趣，它由 Camassa 和 Holm 导出，描述平直底面上浅水表面波的无向性传播[3-4]，同时它也能描述弹性杆中轴对称波的传播[5]。它具有 bi-Hamiltonian 结构并且完全可积[1,3-4]。与 KdV 方程相比，CH 方程的优势在于它具有的两个显著特征：第一，它能描述波的破裂现象—— 解保持有界而其斜率在有限时间趋于无穷；第二，它具有尖峰孤立子解。CH 方程初值问题当初值 $u_0 \in H^s(\mathbf{R}), s > \frac{3}{2}$ 时局部适

* **收稿日期**：2014－01－29
基金项目：国家自然科学基金资助项目（11101337）；教育部新教师博士点基金资助项目（20110182120013）；中央高校基本科研业务费专项资金资助项目（XDJK2011C046）；西南大学博士基金资助项目（SWU110035）
作者简介：张双虎（1984 年生），男；**研究方向**：非线性偏微分方程理论；**通讯作者**：冯兆永；E-mail：fzhaoy@mail.sysu.edu.cn

定[6-9]，而当 $s < \frac{3}{2}$ 时不适定[10]。并且，它同时具有整体强解[6,9,11-12]和有限时间爆破的强解[6-9,11-13]。进一步，它还具有整体弱解[14-15]。

CH 方程具有二次非线性项，最近有两个具有三次非线性项的 CH 型方程被导出：mCH 方程（1）和 Novikov 方程[16]

$$m_t + u^2 m_x + 3muu_x = 0, m = u - u_{xx} \quad (3)$$

这两个方程都具有尖峰孤立子解并且都能描述波的破裂。最近，mCH 方程（1）的几何形成和可积性、局部适定性、爆破准则和破裂机制、尖峰解以及尖峰孤立子的稳定性获得了研究[17-19]。

本文的目标是对（1）的 Cauchy 问题，提出奇异性形成的一些充分条件，建立解不连续依赖于初值意义下的不适定性。首先将 mCH 方程（1）改写成关于动量密度（2）的运输方程

$$m_t + (u^2 - u_x^2) m_x = -2m^2 u_x \quad (4)$$

运输方程的理论保证了解 m 保持正常和不爆破，只要斜率

$$(u^2 - u_x^2)_x = 2mu_x = 2u_x(u - u_{xx}) \quad (5)$$

保持有界；而当斜率（5）下方无界时，解在有限时间爆破[17-18]。当初值保号时，动量密度满足运输方程还隐含了动量 $m(t,x)$ 和强解 $u(t,x)$ 保持相同的符号，这对本文爆破结果的提出至关重要。我们提出的新的爆破利用了下述守恒律

$$I_0 = \int_{\mathbf{R}} u_0(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$H_1 = \int_{\mathbf{R}} mu\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} (u^2 + u_x^2)\,\mathrm{d}x$$

以及作者最近建立的更好的估计（见引理 4）。受文献［10］启发，我们利用文献［18］中给出的（1）的尖峰孤立子建立了非一致依赖性。这一结果的建立，使得我们对初值所在空间的指标有了一个较为清晰的刻画。

记号　在下文中，对给定的 Banach 空间 X，其范数记为 $\|\cdot\|_X$。在不引起混淆的情况下，我们总是省略函数空间的定义域。函数 u 的 Fourier 变换记为 $\mathcal{F}u$ 或 $\hat{u}$。

1　基本引理

我们回顾修正 Camassa-Holm 方程的基本结果，读者可以通过文献［17－18］查阅细节和证明。首先我们给出局部适定性。

引理 1[18] 设 $u_0 \in H^s(\mathbf{R})$，$s > \frac{5}{2}$，则存在时间 $T > 0$ 使得初值问题（1）具有唯一强解 $u \in C([0,T];H^s(\mathbf{R})) \cap C^1([0,T];H^{s-1}(\mathbf{R}))$，并且映射 $u_0 \mapsto u$ 从 u_0 在 $H^s(\mathbf{R})$ 中的邻域到 $C([0,T];H^s(\mathbf{R})) \cap C^1([0,T];H^{s-1}(\mathbf{R}))$ 连续。进一步，如果最大存在时间 $0 < T < +\infty$，那么

$$\int_0^T \|(mu_x)(\tau)\|_{L^\infty}\mathrm{d}\tau = +\infty$$

利用上述准则，我们可得以下爆破准则。

引理 2[18] 设 $u_0 \in H^s(\mathbf{R})$，$s > \frac{5}{2}$，则初值问题（1）对应的解在有限时间 $T > 0$ 爆破当且仅当

$$\lim_{t \to T} \inf_{x \in \mathbf{R}} (mu_x)(t,x) = -\infty$$

为了建立爆破结果，我们还需要一个非常重要的位势 m 满足的守恒性质。考虑由 $u^2 - u_x^2$ 控制的流的常微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}q(t,x)}{\mathrm{d}t} = (u^2 - u_x^2)(t,q(t,x)), \\ \qquad x \in \mathbf{R}, t \in [0,T); \\ q(t,0) = x, x \in \mathbf{R} \end{cases} \quad (6)$$

我们可得以下引理。

引理 3[18] 设 $u_0 \in H^s(\mathbf{R})$，$s > \frac{5}{2}$，令 $T > 0$ 是初值问题（1）对应的强解 u 的最大存在时间，则方程（6）存在唯一解 $q \in C^1([0,T) \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$ 使得映射 $q(t,\cdot)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的一个递增同胚，满足

$$q_x(t,x) = \exp\left(2\int_0^t (mu_x)(s,q(s,x))\mathrm{d}s\right) > 0,$$
$$(t,x) \in [0,T) \times \mathbf{R}$$

进一步，

$$m(t,q(t,x))q_x(t,x) = m_0(x), (t,x) \in [0,T) \times \mathbf{R}$$

2　爆破现象

我们讨论 mCH 方程初值问题的爆破现象。首先引出一个重要引理，通过这个引理我们可以改进其已经确立的爆破结果。

引理 4[20] 设 $u_0 \in H^s(\mathbf{R})$，$s \geqslant 2$ 以及 $T > 0$ 是初值问题（1）对应的解 $u(t,x)$ 的最大存在时间，则

$$M_t + (u^2 - u_x^2)M_x = -2M^2 + m\left(\frac{2}{3}u^3 - uu_x^2\right) -$$
$$\frac{1}{6}m\mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^y(2u^3 + 3uu_y^2 - u_y^3)\mathrm{d}y -$$
$$\frac{1}{6}m\mathrm{e}^{x}\int_{x}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y}(2u^3 + 3uu_y^2 + u_y^3)\mathrm{d}y =$$
$$-2M^2 + m\left(\frac{1}{3}u^3 - uu_x^2\right) -$$
$$\frac{1}{6}m\left(\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{y-x}(u - u_y)^3\mathrm{d}y + \int_{x}^{+\infty} \mathrm{e}^{x-y}(u + u_y)^3\mathrm{d}y\right) \quad (7)$$

引理5[20] 设 $u_0 \in H^s(\mathbf{R}), s \geqslant 3$ 和 $u(t,x)$ 是初值问题（1）所对应的解。若 $m_0 = (1-\partial_x^2)u_0 \geqslant 0$，则成立如下不等式

$$u(t,x) - u_x(t,x) = \mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{y}m(t,y)\mathrm{d}y \geqslant 0,$$

$$u(t,x) + u_x(t,x) = \mathrm{e}^{x}\int_{x}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}m(t,y)\mathrm{d}y \geqslant 0$$

进一步

$$|u_x(t,x)| \leqslant u(t,x)$$

结合议程（4）及 $(1-\partial_x^2)^{-1}m = u$，通过简单的计算，易证引理4和引理5，这里省略。

现在我们陈述本文第一个重要的定理。

定理1 令 $u_0 \in H^s(\mathbf{R})$，$s > \frac{5}{2}$ 以及 $T > 0$ 是初值问题（1）对应的解 $u(t,x)$ 的最大存在时间。假设对所有 $x \in \mathbf{R}$，$m_0(x) = (1-\partial_x^2)u_0 \geqslant 0$ 和对某个 $x_0 \in \mathbf{R}$，$m_0(x_0) > 0$，以及

$$\partial_x u_0(x_0) < -\frac{\| u_0 \|_{H^1}}{\sqrt{6}} \tag{8}$$

则解 $u(t,x)$ 在有限时刻 T_0 爆破

$$T_0 \leqslant -\frac{1}{2m_0(x_0)\partial_x u_0(x_0)} \tag{9}$$

证明 注意到 $M := mu_x$，为了行文的方便，我们令 $\bar{u}(t) := u(t,q(t,x_0))$，$\bar{v}(t) := u_x(t,q(t,x_0))$，$\bar{m}(t) := m(t,q(t,x_0))$ 以及 $\bar{M}(t) := M(t,q(t,x_0))$。由初始条件

$$\bar{m}(0) = m(0,q(0,x_0)) = m_0(x_0) > 0$$，结合引理3可知对任何 $t \in [0,T)$ 有

$$\bar{m}(t) > 0 \tag{10}$$

方程（1）和方程（6）可推出对 $t \in [0,T)$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{m}(t) = -2\bar{m}(t)\bar{M}(t) = -2\bar{m}(t)^2\bar{v}(t) \tag{11}$$

并且，结合引理5，（7）式以及（10）式，易得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{M}(t) \leqslant -2\bar{M}(t)^2 + \bar{m}(t)\left(\frac{1}{3}\bar{u}(t)^3 - \bar{v}(t)^2\bar{u}(t)\right) \tag{12}$$

利用（11）-（12）式，通过简单计算可知成立

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{v}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\bar{M}(t)}{\bar{m}(t)}\right) = \frac{1}{\bar{m}(t)^2}\left(\bar{m}(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{M}(t) - \bar{M}(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{m}(t)\right) = \frac{1}{\bar{m}(t)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{M}(t) + 2\bar{M}(t)^2\right) \leqslant \frac{1}{3}\bar{u}(t)^3 - \bar{v}(t)^2\bar{u}(t) \leqslant \bar{u}(t)\left(\frac{\| u_0 \|_{H^1}^2}{6} - \bar{v}(t)^2\right) \tag{13}$$

以下我们声明对所有 $t \in [0,T)$，总有

$$\bar{v}(t) < -\frac{\| u_0 \|_{H^1}}{\sqrt{6}} \tag{14}$$

事实上，如果（14）式不成立，则由初始条件（8）可知，必存在时间 $t_0 \in (0,T)$ 使得

$$\bar{v}(t) < -\frac{\| u_0 \|_{H^1}}{\sqrt{6}},\ t \in [0,t_0)$$

以及 $$\bar{v}(t_0) = -\frac{\| u_0 \|_{H^1}}{\sqrt{6}} \tag{15}$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{v}(t) \leqslant \bar{u}(t)\left(\frac{\| u_0 \|_{H^1}^2}{6} - \bar{v}(t)^2\right) \leqslant 0, t \in [0,t_0)$$

这就意味着 $\bar{v}(t)$ 在 $t \in [0,t_0)$ 上递减。因此，由 $\bar{v}(t)$ 的连续性易得估计

$$\bar{v}(t_0) \leqslant \bar{v}(t) \leqslant \bar{v}(0) < -\frac{\| u_0 \|_{H^1}}{\sqrt{6}}$$

这与（15）式相矛盾。

结合（11）式、（13）-（14）式，对所有 $t \in [0,T)$，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\bar{m}(t)} = -\frac{1}{\bar{m}(t)^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{m}(t) = 2\bar{v}(t) < 2\bar{v}(0) \tag{16}$$

上式从0到 t 积分可得

$$0 < \frac{1}{\bar{m}(t)} < \frac{1}{\bar{m}(0)} + 2\bar{v}(0)t$$

从而，可推知存在 $0 < T \leqslant T_0$，T_0 由（9）式给出，使得

$$\bar{m}(t) \to +\infty, \text{当 } t \to T \leqslant T_0 = -\frac{1}{2m_0(x_0)\partial_x u_0(x_0)}$$

进一步，由于

$$\bar{M}(t) = \bar{v}(t)\bar{m}(t) < \bar{v}(0)\bar{m}(0) \leqslant 0$$

从而

$$\inf_{x \in \mathbf{R}} M(t,x) \leqslant \bar{M}(t) \to -\infty, \quad \text{当 } t \to T \leqslant T_0 \tag{17}$$

这就证明了解 $u(t,x)$ 在有限时间 T 爆破。

注1 定理1不仅在初始条件上提升了文[18]中定理5.2，并且爆破时间的估计更优

$$\tilde{T}_0 = \frac{1}{m_0(x_0)} \cdot \frac{1}{-u_0'(x_0) + \sqrt{u_0'(x_0)^2 - \frac{\sqrt{2}\| u_0 \|_{H^1}}{m_0(x_0)}}} > -\frac{1}{2m_0(x_0)\partial_x u_0(x_0)} = T_0$$

注意到 mCH 方程（1）具有性质：若 $u(t,x)$ 是（1）的解，则 $v(t,x) = -u(t,x)$ 也是（1）的解。因而，通过类似于定理1的分析，可以建立如下 m_0 非正时的爆破结果。

推论 1　令 $u_0 \in H^s(\mathbf{R})$，$s > \frac{5}{2}$ 以及 $T > 0$ 是初值问题（1）对应的解 $u(t,x)$ 的最大存在时间。假设对所有 $x \in \mathbf{R}$，$m_0(x) = (1 - \partial_x^2)u_0 \leqslant 0$ 和对某个 $x_0 \in \mathbf{R}$，$m_0(x_0) < 0$，以及

$$\partial_x u_0(x_0) > \frac{\| u_0 \|_{H^1}}{\sqrt{6}} \tag{18}$$

则解 $u(t,x)$ 在有限时刻 T_0 爆破

$$T_0 \leqslant -\frac{1}{2m_0(x_0)\partial_x u_0(x_0)} \tag{19}$$

3　非一致连续依赖性

本节致力于考察 mCH 方程的初值问题（1）在空间 $H^s(\mathbf{R})$，$s < \frac{3}{2}$ 中的不适定性。我们首先回忆 mCH 方程的 Peakon 解，然后给出不适定性定理。

引理 6[18]　对任何 $a \neq 0$，具尖峰形式的函数

$$u_a(t,x) = a\mathrm{e}^{-|x-ct|}, c = \frac{2}{3}a^2,$$

是（1）的一个整体弱解。

定理 2　假设 $u_0 \in H^s(\mathbf{R})$，$s < \frac{3}{2}$，则初值问题（1）在解关于初值不一致连续依赖意义下在 Sobolev 空间 $H^s(\mathbf{R})$ 中不适定。

为了证明上述定理，我们首先提出一个关键引理。

引理 7　若 $s < \frac{3}{2}$，则初值问题（1）存在两个空间 $H^s(\mathbf{R})$ 中的弱解序列 u_n^1 和 u_n^2，对任何 $t > 0$，成立

$$\| u_n^1(0,\cdot) - u_n^2(0,\cdot) \|_{H^s} \leqslant \frac{C_1(s)}{n} \tag{20}$$

以及

$$\| u_n^1(t,\cdot) - u_n^2(t,\cdot) \|_{H^s} \geqslant C_2(s)t^{\frac{3-2s}{2}}n^{\frac{1}{2}+|s|+s} \tag{21}$$

其中

$$C_1(s) = \left(6\int_{\mathbf{R}}(1+\xi^2)^{s-2}\mathrm{d}\xi\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$C_2(s) = \sqrt{12\,\frac{2^{s-2}}{3-2s}\left(\frac{2t}{\pi}\right)^{3-2s}(1-3^{2s-3})}$$

证明　由引理 6，对任何 $c > 0$ 考察

$$u_c(t,x) = \sqrt{\frac{3}{2}c}\mathrm{e}^{-|x-ct|}$$

首先，通过计算 u_c 关于 x 的 Fourier 变换可知

$$\hat{u}_c(t,\xi) = \sqrt{\frac{3}{2}c}\int_{\mathbf{R}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{e}^{-|x-ct|}\mathrm{d}x =$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}c}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ct\xi}\left(\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\right) =$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}c}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ct\xi}\left(\frac{1}{1-\mathrm{i}\xi} + \frac{1}{1+\mathrm{i}\xi}\right) = \sqrt{6c}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ct\xi}\frac{1}{1+\xi^2} \tag{22}$$

因此，当 $t = 0$ 时可得

$$\| u_{c_1}(0,\cdot) - u_{c_2}(0,\cdot) \|_{H^s}^2 = \int_{\mathbf{R}}(1+\xi^2)^s | \hat{u}_{c_1}(0,\xi) - \hat{u}_{c_2}(0,\xi) |^2\mathrm{d}\xi = 6(\sqrt{c_1} - \sqrt{c_2})^2\int_{\mathbf{R}}(1+\xi^2)^{s-2}\mathrm{d}\xi \tag{23}$$

另一方面，当 $t > 0$ 时，

$$\| u_{c_1}(t,\cdot) - u_{c_2}(t,\cdot) \|_{H^s}^2 = \int_{\mathbf{R}}(1+\xi^2)^s | \hat{u}_{c_1}(t,\xi) - \hat{u}_{c_2}(t,\xi) |^2\mathrm{d}\xi =$$

$$6\int_{\mathbf{R}}(1+\xi^2)^{s-2} | \sqrt{c_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}c_1t\xi} - \sqrt{c_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}c_2t\xi} | \mathrm{d}\xi =$$

$$6\int_{\mathbf{R}}(1+\xi^2)^{s-2} | c_1 + c_2 - \sqrt{c_1c_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(c_1-c_2)t\xi} - \sqrt{c_1c_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(c_1-c_2)t\xi} | \mathrm{d}\xi = 6(c_1+c_2)\int_{\mathbf{R}}(1+\xi^2)^{s-2}\mathrm{d}\xi -$$

$$12\sqrt{c_1c_2}\int_{\mathbf{R}}(1+\xi^2)^{s-2}\cos((c_1-c_2)t\xi)\mathrm{d}\xi =$$

$$\| u_{c_1}(0,\cdot) - u_{c_2}(0,\cdot) \|_{H^s}^2 + 12\sqrt{c_1c_2}I_t(c_1,c_2) \tag{24}$$

其中

$$I_t(c_1,c_2) = \int_{\mathbf{R}}\frac{1-\cos((c_1-c_2)t\xi)}{(1+\xi^2)^{2-s}}\mathrm{d}\xi$$

注意到 I_t 非负并且当 $\xi = \frac{2k\pi}{(c_1-c_2)t}$ 时为零，这里 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$。对给定的 $t > 0$，令 $\xi_1 = \frac{\pi}{2t(c_1-c_2)}$，$\xi_2 = \frac{3\pi}{2t(c_1-c_2)}$. 选择 $n \in \mathbf{N}$ 使得 $\frac{n\pi}{2t} \geqslant 1$，令

$$c_1 = n^{4(1+|s|)} + \frac{1}{n}, c_2 = n^{4(1+|s|)}, n = 1,2,3,\cdots$$

则可以推出

$$12\sqrt{c_1c_2}I_t(c_1,c_2) \geqslant 12n^{4(1+|s|)}\int_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{1-\cos(c_1-c_2)t\xi}{(1+\xi^2)^{2-s}}\mathrm{d}\xi =$$

$$12n^{4(1+|s|)}\int_{\frac{n\pi}{2t}}^{\frac{3n\pi}{2t}}\frac{1-\cos\frac{t\xi}{n}}{(1+\xi^2)^{2-s}}\mathrm{d}\xi \geqslant$$

$$12n^{4(1+|s|)}\int_{\frac{n\pi}{2t}}^{\frac{3n\pi}{2t}}\frac{1}{(2\xi^2)^{2-s}}\mathrm{d}\xi =$$

$$12\,\frac{2^{s-2}}{3-2s}\left(\frac{2t}{\pi}\right)^{3-2s}(1-3^{2s-3})n^{1+4|s|+2s} \tag{25}$$

结合（24）－（25）式可知

$$\| u_{c_1}(t,\cdot) - u_{c_2}(t,\cdot) \|_{H^s}^2 \geqslant$$
$$\| u_{c_1}(0,\cdot) - u_{c_2}(0,\cdot) \|_{H^s}^2 +$$
$$12\frac{2^{s-2}}{3-2s}\left(\frac{2t}{\pi}\right)^{3-2s}(1-3^{2s-3})n^{1+4|s|+2s} \geqslant$$
$$12\frac{2^{s-2}}{3-2s}\left(\frac{2t}{\pi}\right)^{3-2s}(1-3^{2s-3})n^{1+4|s|+2s} =$$
$$C_2(s)^2 n^{1+4|s|+2s} t^{3-2s}$$

进一步，得

$$\| u_{c_1}(0,\cdot) - u_{c_2}(0,\cdot) \|_{H^s}^2 =$$
$$6(\sqrt{c_1}-\sqrt{c_2})^2\int_{\mathbb{R}}(1+\xi^2)^{s-2}\mathrm{d}\xi =$$
$$6\frac{(c_1-c_2)^2}{(\sqrt{c_1}+\sqrt{c_2})^2}\int_{\mathbb{R}}(1+\xi^2)^{s-2}\mathrm{d}\xi \leqslant$$
$$\frac{6}{n^2}\int_{\mathbb{R}}(1+\xi^2)^{s-2}\mathrm{d}\xi$$

从而，通过定义 $u_n^1(t,x) = u_{c_1}(t,x)$，$u_n^2(t,x) = u_{c_2}(t,x)$，我们完成了引理的证明。

最后，很容易知道定理2是引理7的一个直接结果。

注2 分析文献［17－18］中的定理和本文中的定理2，我们知道在局部适定性和非适定性之间的指标存在间隔，这是我们以后研究努力弥补的方向。

参考文献：

［1］ FUCHSSTEINER B. Some tricks from the symmetry-toolbox for nonlinear equations: generalizations of the Camassa-Holm equation［J］. Physica D, 1996, 95: 229－243.

［2］ OLVER P, ROSENAU P. Tri-Hamiltonian duality between solitons and solitary-wave solutions having compact support［J］. Phys Rev E,1996, 53: 1900－1906.

［3］ CAMASSA R, HOLM D. An integrable shallow water equation with peaked solitons［J］. Phys Rev Lett, 1993, 71: 1661－1664.

［4］ FUCHSSTEINER B, FOKAS A. Symplectic structures, their Bäcklund transformations and hereditary symmetries［J］. Physica D, 1981/1982, 4: 47－66.

［5］ DAI H. Model equations for nonlinear dispersive waves in a compressible Mooney-Rivlin rod［J］. Acta Mech, 1998, 127: 193－207.

［6］ CONSTANTIN A, ESCHER J. Global existence and blow-up for a shallow water equation［J］. Ann Sc Norm Super Pisa Cl Sci, 1998, 26(4): 303－328.

［7］ LI Y, OLVER P. Well-posedness and blow-up solutions for an integrable nonlinearly dispersive model wave equation［J］. J Differential Equations, 2000, 162: 27－63.

［8］ RODRIGUEZ-BLANCO G. On the Cauchy problem for the Camassa-Holm equation［J］. Nonlinear Anal, 2001, 46: 30－327.

［9］ YIN Z. Well-posedness, blowup, and global existence for an integrable shallow water equation［J］. Discrete Contin Dyn Syst, 2004, 11: 393－411.

［10］ HIMONAS A, MISIOLEK G. The Cauchy problem for an integrable shallow water equation［J］. Differential Integral Equations, 2001, 14: 821－831.

［11］ CONSTANTIN A. Existence of permanent and breaking waves for a shallow water equation: a geometric approach［J］. Ann Inst Fourier (Grenoble), 2000, 50: 321－362.

［12］ CONSTANTIN A, ESCHER J. Well-posedness, global existence, and blowup phenomena for a periodic quasi-linear hyperbolic equation［J］. Comm Pure Appl Math, 1998, 51: 475－504.

［13］ CONSTANTIN A, ESCHER J. Wave breaking for nonlinear nonlocal shallow water equations［J］. Acta Math, 1998, 181: 229－243.

［14］ XIN Z, ZHANG P. On the weak solutions to a shallow water equation［J］. Comm Pure Appl Math, 2000, 53: 1411－1433.

［15］ XIN Z, ZHANG P. On the uniqueness and large time behavior of the weak solutions to a shallow water equation［J］. Comm Partial Differential Equations, 2000, 27: 1815－1844.

［16］ NOVIKOV V. Generalizations of the Camassa-Holm equation［J］. J Phys A, 2009, 42: 342002.

［17］ FU Y, GUI G, LIU Y, et al. On the Cauchy problem for the integrable modified Camassa-Holm equation with cubic nonlinearity［J］. J Differential Equations, 2014, 255: 1905－1938.

［18］ GUI G, LIU Y, OLVER P, et al. Wave-breaking and peakons for a modified Camassa-Holm equation［J］. Comm Math Phys, 2013, 319: 731－759.

［19］ LIU X, QIAO Z, YIN Z. On the Cauchy problem for a generalized Camassa-Holm equation with both quadratic and cubic nonlinearity［J］. Commun Pure Appl Anal, 2014, 13: 1283－1304.

［20］ LIU Y, OLVER P, QU C, et al. On the blow-up of solutions to the modified integrable Camassa-Holm equation［J］. Analysis and Appl,2014,12(4):355－368.